31-10-18

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = k < 1 \Rightarrow a_n \to 0$$

Απόδειξη

"Για n μεγάλο, $|a_{n+1}| \simeq |a_n| k \Rightarrow |a_{n+\nu}| \simeq |a_n| k^\nu \xrightarrow{\nu \to +\infty} 0$"

Έστω $\varepsilon > 0$ $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ τω $\forall$ $n \geq n_0$, $k - \varepsilon < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \varepsilon + k$

Διαλέγω $\varepsilon = \frac{1-k}{2}$ $\Rightarrow \forall n \geq n_0 = n_0(\varepsilon)$, ισχύει

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \lambda$ $\left(\lambda = \varepsilon + k = \frac{1+k}{2} < 1\right)$

$$0 \leq \left|\frac{a_{n_0+\nu}}{a_{n_0}}\right| = \left|\frac{a_{n_0+\nu}}{a_{n_0+\nu-1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{n_0+\nu-1}}{a_{n_0+\nu-2}}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| < \lambda^\nu \xrightarrow{\nu \to +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\nu \to +\infty} \left|\frac{a_{n_0+\nu}}{a_{n_0}}\right| = 0 \Rightarrow \lim_{\nu \to +\infty} |a_{n_0+\nu}| = 0 \Rightarrow \lim_{\nu \to +\infty} |a_\nu| = 0$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} \boxed{\lim_{\nu \to +\infty} |a_\nu| = 0 \Rightarrow a_\nu \to 0}$$

$* \; -|a_\nu| \leq a_\nu \leq |a_\nu|$

Μονότονες ακολουθίες

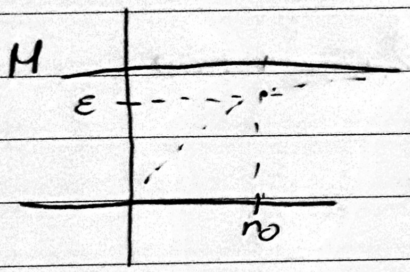
$a_n = \frac{2n-7}{3n+2}$ μονότονη

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-7}{3(n+1)+2} - \frac{2n-7}{3n+2} = \frac{2n-5}{3n+5} - \frac{2n-7}{3n+2} =$$

$$\frac{(2n-5)(3n+2)-(2n-7)(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)} = \frac{6n^2-11n-10-(6n^2-11n-35)}{(3n+5)(3n+2)} =$$

$$\frac{\cancel{9}\ 25}{(3n+5)(3n+2)} > 0$$

$\Rightarrow a_{n+1} > a_n \Rightarrow \{a_n\}$ γν. αύξουσα



$\{a_n\}$ αύξουσα κ' φραγμένη

$M = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$

Θεώρημα

Έστω $\{a_n\}$ μονότονη

(i) Αν $\{a_n\}$ αύξουσα, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n, \nu\in\mathbb{N}\}$

(ii) Αν $\{a_n\}$ φθίνουσα, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n, \nu\in\mathbb{N}\}$

Ειδικότερα η $\{a_n\}$ συγκλίνει ανν είναι φραγμένη

Απόδειξη

(i) Περίπτωση 1: $\{a_n\}$ φραγμένη $\Rightarrow \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} = M_0 \in \mathbb{R}$

Από ορισμό του supremum: Αν $\varepsilon>0$, $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ τω

$a_{n_0}+\varepsilon > M_0 \geq a_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$

Όμως, $\{a_n\}$ αύξουσα $\Rightarrow \forall n \geq n_0$, έχουμε $a_n \geq a_{n_0}$
$\Rightarrow \forall n \geq n_0, a_n + \varepsilon \geq a_{n_0} + \varepsilon > M_0 \geq a_n > a_n - \varepsilon \Rightarrow$
$M_0 - \varepsilon < a_n < M_0 + \varepsilon, \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow$
$|a_n - M_0| < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow$
$a_n \to M_0$

~~Περίπτωση~~ 2: $\{a_n\}$ μη-φραγμένη
$a_1 \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{a_n\}$ μη-φραγμένη από πάνω
$\to \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$

(ii) Αυδο $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$. Έστω $M > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τω.

$a_{n_0} > M \xRightarrow[\text{αύξουσα}]{\{a_n\}} \forall n \geq n_0, a_n \geq a_{n_0} > M \Rightarrow a_n \to +\infty$

Πάρε την $\{-a_n\}$

<u>Άσκηση</u>

(i) Έστω $a_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$

νδο (i) $\{a_n\}$ μονότονη και φραγμένη
(ii) Να βρεθεί το $\lim a_n$

<u>Λύση</u>

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) =$

$\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)}(1 + \ldots + 1/n) + \frac{1}{(n+1)^2} =$

$$\frac{1}{n+1}\underbrace{\left[-\frac{1}{n}(1 + \ldots + 1/n) + \frac{1}{n+1}\right]}_{A}$$

$A > 0$? (Ισχύει)

$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\underbrace{(1+\ldots+1/n)}_{B} > \frac{1}{n+1}$

$B > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow a_{n+1} < a_n \Rightarrow \{a_n\}$ φθίνουσα $\quad | \forall n \in \mathbb{N}$

$0 \leq a_n \leq a_1 \Rightarrow \{a_n\}$ φραγμένη $\xRightarrow{\text{Μονότονη}} \{a_n\}$ συγκλίνει (έστω ότι $\lim a_n = \ell$)

(ii) $a_n = \frac{1}{n}(1 + 1/2 + \ldots + 1/n)$

<u>Με επαγωγή:</u> $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \leq \sqrt{n}$, για n αρκετά μεγάλο

$\Rightarrow 0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{n}}{n} \to 0$

$a_n = \frac{1}{n}(1 + 1/2 + \ldots + 1/n) = \frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n_0}\right) + \overbrace{\left(\frac{1}{n_0+1}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}^{n-n_0 \text{ στοιχεία}}\right]$

$\leq \frac{1 + 1/2 + \ldots + 1/n_0}{n} + \frac{(n-n_0)\left(\frac{1}{n_0+1}\right)}{n}$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 < n$

$\to 0 \qquad \to 0$

$0 \leq \lim \frac{1}{n}(1 + \ldots + 1/n) \leq \frac{1}{n_0+1}$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim \frac{1}{n}(1 + \ldots + 1/n) = 0$

<u>Απόδειξη Θεωρ A (προηγ. μάθημα)</u>

$a_n \to +\infty$. Έστω $M > 0$. Τότε, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $a_n > M, \forall n \geq n_0$. Έστω $\{a_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{a_n\}$. Τότε $k_n \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \geq n_0$, $k_n \geq k_{n_0} \geq n_0 \Rightarrow \forall n \geq n_0$, $a_{k_n} > M \Rightarrow$ $a_{k_n} \to +\infty$.

Απόδειξη Θεωρ Β

Έστω $M>0$. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall\, n \geq n_0,\ b_n \geq a_n > M \Rightarrow$
$b_n \to +\infty$

Απόδειξη Θεωρ Γ

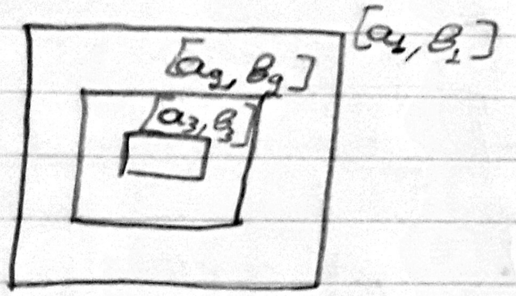
Έστω ότι $\lim a_n = +\infty$. Για $M>0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$
$a_n > M$

Αν $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0' \in \mathbb{N}$ τ.ω. $l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon,\ \forall n \geq n_0'$

$\Rightarrow \forall\, n \geq n_0'' = \max\{n_0, n_0'\},\ b_n > \frac{a_n}{l+\varepsilon} > \frac{M}{l+\varepsilon} \Rightarrow b_n \to +\infty$

Κιβωτισμός

$\{[a_n, b_n]\},\ [a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}],\ \forall\, n \geq 2$



Αν επιπλέον, $b_n - a_n \to 0$ τότε η οικογένεια λέγεται κιβωτισμός του Cantor

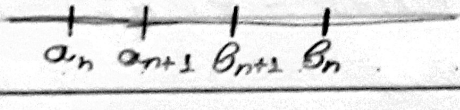
Θεώρημα

Αν $\{[a_n, b_n]\}$ κιβωτισμός του Cantor, τότε
$\exists\, \xi : \bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}$

υπάρχει ένα και μοναδικό ξ που να ανήκει σε αυτά

Απόδειξη

$[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \Rightarrow a_n \leq a_{n+1},\ b_n \geq b_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \{a_n\}$ αύξουσα κ' $\{b_n\}$ φθίνουσα



* Ισχύει ότι: $[a_1,\beta_1] \supseteq [a_n,\beta_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Επίσης $a_1 \leq a_n \leq \beta_1$, $a_1 \leq \beta_n \leq \beta_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\xrightarrow[\text{κ' μονότονες}]{\{a_n\},\{\beta_n\}\text{ φραγμ.}}$

$\{a_n\}, \{\beta_n\} \rightarrow$ συγκλίνουν

Έστω $A = \lim a_n$, $B = \lim \beta_n (= \xi)$

Όμως $\lim (a_n - \beta_n) = 0 \Rightarrow A = B = \xi$

$\{a_n\}$ αύξουσα $\Rightarrow \xi = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow a_n \leq \xi$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\{\beta_n\}$ φθίνουσα $\Rightarrow \xi = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \xi \leq \beta_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$a_n \leq \xi \leq \beta_n, \forall n \in \mathbb{N}$

$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, \beta_n]$

Έστω $\xi' \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, \beta_n] \Rightarrow a_n \leq \xi' \leq \beta_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Παίρνω την ακολουθία $\{\gamma_n\}$ με $\gamma_n = \xi'$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \underset{\searrow \xi}{a_n} \leq \gamma_n \leq \underset{\searrow \xi}{\beta_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\xrightarrow[\text{συγκλινουσών ακολουθιών}]{\text{Από Θεώρημα}}$ $\gamma_n \rightarrow \xi \Rightarrow \xi = \xi'$